

# Über die mechanischen Resonanzen eines zusammengesetzten plättchenförmigen Schwingers

ANDREAS SCHLACHETZKI \*

II. Physikalisches Institut der Universität Köln

(Z. Naturforsch. 26 a, 1919—1925 [1971]; eingegangen am 15. September 1971)

*Mechanical Resonances of a Compound, Disc Shaped Resonator*

Measurements by an ultrasonic resonance method in the frequency range from 0.8 to 26 MHz are reported. The resonators consist of an X-cut quartz with disc shaped samples from polycrystalline nickel, cemented on both sides of the quartz. The resonance spectrum of a quartz is analysed first. From the resonances of the composite system different sound velocities are derived allowing for the interpretation of the vibrations.

## 1. Einleitung

Zur Bestimmung der Fortpflanzungskonstanten von Ultraschall in Festkörpern werden häufig Resonanzmethoden angewendet, die dem jeweils vorliegenden Problem angepaßt werden. Speziell für die Untersuchung von ferromagnetischen Stoffen wurde von GOEHLICH<sup>1</sup> ein Verfahren entwickelt, bei dem die Resonanzen eines flachen, zylinderförmigen Schwingers ausgemessen werden. Mit diesem Verfahren können dynamische Ummagnetisierungsvorgänge in Ferromagnetika analysiert werden<sup>2</sup>, die bei Frequenzen von einigen MHz eine Rolle spielen. Um aus den Messungen eindeutige Schlüsse ziehen zu können, müssen die Schwingungsformen der verwendeten Resonatoren möglichst genau bekannt sein. In dieser Arbeit werden experimentelle Ergebnisse mitgeteilt, die eine Deutung der Eigenschwingungen der Resonatoren erlauben.

Die Resonatoren haben plättchenförmige Gestalt; sie sind aus kreisrunden, polykristallinen Nickelproben und aus einem X-Quarz ebensolcher Gestalt zusammengesetzt (Abb. 1). Diese Schwinger werden zwischen 0,8 und 26 MHz untersucht. Das experimentelle Verfahren wird im 2. Abschnitt dieser Arbeit genauer beschrieben. Wesentlich für die Interpretation des Resonanzspektrums des zusammengesetzten Schwingers (4. Abschnitt) ist das Schwingungsverhalten des Quarzes, der als Ultraschall-generator dient; deshalb befaßt sich der 3. Abschnitt

mit dem Resonanzverhalten eines einzelnen X-Quarzes. Im Anhang wird an einem Beispiel die Auswertung der Meßergebnisse gezeigt.

## 2. Meßmethode und Proben

Bei der von GOEHLICH<sup>1</sup> angegebenen Meßmethode ist der mechanische Schwinger über zwei ringförmige Elektroden an eine hochfrequenzmäßig angepaßte Meßbrücke angeschlossen (Abb. 1). Dabei kann der Schwinger außerhalb seiner mechanischen Resonanzen als ein Kondensator mit dem Quarz als Dielektrikum und den Nickelproben als Elektroden aufgefaßt werden. In der Resonanz tritt infolge der mechanischen Schwingung zu der festen Kapazität dieses Kondensators ein komplexer Leitwert hinzu, der zu einer Verstimmung der HF-Meßbrücke führt. Als Resultat ergeben sich Resonanzkurven, die die akustische Impedanz der Proben in Abhängigkeit von der Meßfrequenz angeben. Aus der Frequenz des Resonanzmaximums läßt sich auf die Schallgeschwindigkeit in den Proben schließen; dieser Schluß beruht im wesentlichen darauf, daß in der Resonanz ein ganzzahliges Vielfaches der halben Schallwellenlänge im Resonator Platz hat. Da in ferromagnetischen Stoffen die Schallgeschwindigkeit vom magnetischen Zustand abhängt, beziehen sich alle Angaben dieser Arbeit auf die magnetische Sättigung. Deshalb befindet sich der Schwinger im Luftspalt eines Elektromagneten.

\* Sonderdruckanforderungen an die gegenwärtige Adresse: Forschungsinstitut des Fernmeldetechnischen Zentralamtes, D-6100 Darmstadt, Am Kavalleriesand 3.

<sup>1</sup> H. J. GOEHLICH, Z. Naturforsch. 13 a, 90 [1958].

<sup>2</sup> A. SCHLACHETZKI u. G. DIETZ, Z. Angew. Phys. 28, 29 [1969].



Wie im Teilbild von Abb. 1 angedeutet, haben die Meßkurven neben dem Hauptmaximum häufig ein oder auch mehrere Nebenmaxima. Dies läßt sich durch ein Ersatzschaltbild beschreiben (vgl. z. B. <sup>3, 4</sup>),

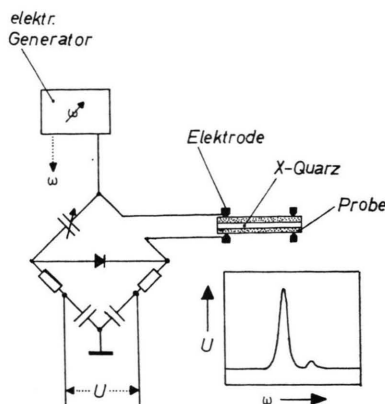


Abb. 1. Versuchsaufbau, schematisch.

in dem der statischen Kapazität des Schwingers ein elektrischer Serienresonanzkreis parallelgeschaltet ist. Es ergeben sich dann mit der Reihenresonanzfrequenz und der Parallel- oder Antiresonanzfrequenz zwei Resonanzfrequenzen. Ein derart einfaches Ersatzschaltbild gibt jedoch keineswegs immer die Experimente richtig wieder, so daß kompliziertere elektrische Ersatzschaltungen notwendig sind <sup>3</sup>. Dieses Problem ist im Zusammenhang dieser Arbeit nicht wichtig, da es hier nur auf das Resonanzmaximum ankommt. Denn das Maximum der elastischen Auslenkung des Schwingers ist in der Hauptresonanz, die auch am stärksten durch das Magnetfeld beeinflussbar ist.

Um übersichtliche Resonanzkurven von Schwingern zu bekommen, deren Eigenfrequenzen im MHz-Bereich liegen, müssen die Schwingler der gewünschten idealen Form sehr nahe kommen. Deshalb muß viel Sorgfalt auf die Herstellung der Proben verwandt werden.

Für die Experimente dieser Arbeit wurden piezoelektrische Quarze im X-Schnitt von der Fa. Dr. Steeg & Reuter, Bad Homburg v. d. Höhe, in feinmatt geschliffenem Zustand bezogen; die Grundfrequenz ihrer Dickenschwingung liegt zwischen 2 und 27 MHz. Sie sind besser als  $\lambda/2$  für Natriumlicht planparallel; einige sind jedoch bikonvex geschliffen mit einem Dickenunterschied von maximal  $1\ \mu\text{m}$  zwischen Mitte des Quarzes und dem Rand. Durch diese spezielle Form soll ein übersichtlicheres Resonanzspektrum erreicht

werden. Die Quarze sind besser als auf  $0,5^\circ$  orientiert. Sie sind meist ohne Elektroden, da i. allg. die elektrische Anregung über beidseitig ange kittete Metallproben erfolgt. Wenn die Quarze allein untersucht werden, sind Silberelektroden aufgedampft, die die Stirnflächen des Quarzes ganz überdecken.

Zur Untersuchung der Resonanzen des zusammengesetzten Schwingers sind beidseitig auf den Quarz Nickelproben aufgekittet; als Kitten werden Salol, Araldit oder Wachs mit Zusätzen verwendet. Die Kittschichten dürften etwa  $1\ \mu\text{m}$  dick sein. Die Nickelproben sind aus Blechen schonend mit der Laubsäge herausgearbeitet und anschließend mit kleinstem Span rundgedreht, so daß weniger als 2% des Probenvolumens in seiner Struktur gestört ist; dies wurde nach Anätzen der Proben unter dem Mikroskop kontrolliert. Die Bleche wurden als Nickel S von der Fa. V a c u u m s c h m e l z e, Hanau, geliefert und sind bei  $800^\circ\text{C}$  in Wasserstoff gegläht. Sie zeigen eine geringe Textur (Würfellage). Die Kristallitdurchmesser liegen zwischen 30 und  $100\ \mu\text{m}$ . Die Proben wurden mit einer Zweischeibenlappmaschine ALOO der Fa. P. Wolters, Mettmann, auf eine Planparallelität von besser als  $0,8\ \mu\text{m}$  über die gesamte Oberfläche gebracht. Sie haben eine Dicke zwischen 0,58 und 0,83 mm und die Durchmesser 10 oder 12,5 mm ebenso wie die X-Quarze. Eine gute Planparallelität der Proben ist unbedingte Voraussetzung, da schon Proben, die auf nur  $2-3\ \mu\text{m}$  planparallel sind, unentwirrbare Resonanzspektren liefern.

### 3. Schwingungsverhalten eines Ultraschall-Quarzes

In diesem Abschnitt werden die Resonanzen eines X-Quarzes beschrieben, der als Ultraschallgenerator in einem zusammengesetzten Schwinger dient (vgl. Anhang). Der Quarz hat eine Dicke von 0,41 mm und einen Durchmesser von 12,5 mm und ist beidseitig mit Silberelektroden bedampft. Er wird in der Anordnung wie in Abb. 1 untersucht.

#### a) Eigenfrequenzen eines X-Quarzes

Das anregende elektrische Wechselfeld ist parallel zur kristallographischen X-Achse des Quarzes. Mechanische Schwingungen können dann auf Grund der longitudinalen und transversalen reziproken piezoelektrischen Effekte angeregt werden, d. h. der Quarz ändert durch die Wirkung des elektrischen Feldes periodisch seine Abmessungen in den kristallographischen X- und Y-Achsen. Deshalb zeigt der X-Quarz mehrere Resonanzen. In Abb. 2 ist die beobachtete Resonanzamplitude des Quarzes in will-

<sup>3</sup> E. SKUDRZYK, Die Grundlagen der Elektroakustik, Springer-Verlag, Wien 1954.

<sup>4</sup> L. BERGMANN, Der Ultraschall, 6. Aufl., S. Hirzel-Verlag, Stuttgart 1954.

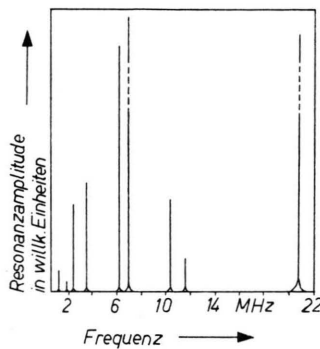


Abb. 2. Die beobachteten Resonanzen eines X-Quarzes.

kürlichen Einheiten in Abhängigkeit von der Frequenz aufgetragen; die Resonanzen bei 6,9 MHz und 20,7 MHz sind etwa mit 1/20 bzw. 1/10 ihrer Höhe wiedergegeben.

Wenn das anregende elektrische Wechselfeld  $E_x$  in Richtung der polaren Achse des Quarzes anliegt, dann gelten folgende Gleichungen<sup>4</sup>:

$$x_x = d_{11} E_x, \quad (1) \quad y_y = -d_{11} E_x, \quad (2) \quad y_z = d_{14} E_x. \quad (3)$$

$x_x$ ,  $y_y$  und  $y_z$  sind die elastischen Deformationen,  $d_{11}$  und  $d_{14}$  die piezoelektrischen Moduln des Quarzes.  $x$  ist die Richtung der Plattennormale; die  $y$ - und  $z$ -Richtungen liegen in der Plattenebene und fallen mit den kristallographischen  $Y$ - und  $Z$ -Richtungen des Quarzes zusammen.

Gl. (1) drückt den longitudinalen reziproken piezoelektrischen Effekt aus. Die Resonanzfrequenzen sind gegeben durch<sup>5</sup>:

$$\nu_n = \frac{2n+1}{2d} \sqrt{\frac{c_{11}}{\rho}} = 2,84 \cdot 10^6 \frac{2n+1}{d}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $d$  in mm;  $\nu_n$  in Hz.

$d$  ist die Dicke des Quarzes,  $c_{11}$  sein Elastizitätsmodul und  $\rho$  seine Dichte. Mit  $d = 0,41$  mm ergeben sich die Resonanzen:

$$\nu_0 = 6,93 \text{ MHz} \quad \text{und} \quad \nu_1 = 20,79 \text{ MHz}.$$

Somit sind die nach Abb. 2 bei 6,9 und 20,7 MHz beobachteten Resonanzen als longitudinale Dicken-schwingungen in Richtung der  $X$ -Achse aufzufassen.

Gl. (2) beschreibt den transversalen reziproken piezoelektrischen Effekt, der nur bei begrenzten Platten wirksam werden kann. Der an sich einfache transversale Effekt führt bald zu erheblichen Schwierigkeiten, wenn die mathematische Formulierung für eine Kreisscheibe im  $X$ -Schnitt versucht wird.

Denn selbst unter vereinfachenden Annahmen über den Schwingungszustand der Platte folgt wegen der elastischen Anisotropie des Quarzes schließlich die Differentialgleichung der schwingenden Membran mit elliptischer Berandung, die sich nur mit Mathieuschen Funktionen lösen läßt. Es ist deshalb von vornherein angebracht, die Näherung noch weiter zu treiben und die Kreisscheibe durch eine rechteckige Platte der Breite  $l = (2/3) D$  zu ersetzen;  $D$  ist der Durchmesser der Kreisscheibe (Abb. 3). Dieser Wert

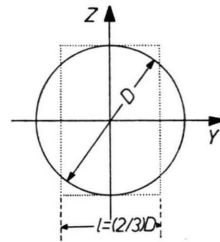


Abb. 3. Annäherung der Kreisscheibe durch einen Quader.

für  $l$  ergibt sich daraus, daß der Kreis durch seine mittlere Ausdehnung in  $Y$ -Richtung beschrieben wird. Die Lösungen der Mathieuschen Differentialgleichung liefern eine anharmonische Reihe von Resonanzen einer Kreisscheibe; in der Näherung werden statt dessen die Grundschwingung  $\nu_0$  einer rechteckigen Platte und ihre ungeradzahlig Harmonischen berechnet. Da für den untersuchten Quarz  $D = 12,5$  mm ist, folgt<sup>4</sup>:

$$\nu_0 = 0,328 \text{ MHz}.$$

Vergleicht man diesen Wert mit den experimentellen Ergebnissen in Abb. 2, so folgt, daß die 3., 5., 7. und 11. Oberschwingung angeregt werden (Tab. 1);

Tab. 1. Experimentell gefundene und mit Hilfe des transversalen Piezoeffektes abgeschätzte Resonanzfrequenzen.

experimentell	nach der Näherung berechnet
1,04 MHz	$3 \nu_0 = 0,984 \text{ MHz}$
1,73	$5 \nu_0 = 1,64$
2,3	$7 \nu_0 = 2,296$
3,45	$11 \nu_0 = 3,61$

daß nur ungeradzahlig Oberschwingungen erscheinen, liegt an der piezoelektrischen Anregungsweise. Die Ausdeutung noch höherer Resonanzen des Quarzes in dieser Näherung ist wegen der Anharmonizität der Mathieuschen Lösungen wenig sinnvoll. Jedoch dürften auch noch die beobachteten Resonanzen bei 10,35 und 11,5 MHz (Abb. 2) auf den transversalen Piezoeffekt zurückzuführen sein.

<sup>5</sup> W. G. CADY, Piezoelectricity, Dover Publ., New York 1964.

Nach CHRISTOFFEL<sup>5</sup> sind in einem Kristall beliebiger Orientierung drei verschiedene elastische Wellen möglich. Für einen Resonator bedeutet dies die Möglichkeit von drei Resonanzfrequenzen. In der Spezialisierung auf einen X-Quarz<sup>5</sup> ergeben sich die Resonanzen 4,03, 6,15 und 6,93 MHz. Die Resonanz bei 6,93 MHz ist eine longitudinale Schwingung und wurde bereits als Folgerung aus Gl. (1) abgeleitet. Die beiden anderen Resonanzen sind vom transversalen Typ mit Auslenkungsrichtungen von  $-31^\circ$  bzw.  $59^\circ$  relativ zur kristallographischen Y-Richtung des Quarzes. Das beobachtete Resonanzspektrum in Abb. 2 zeigt das Auftreten einer Resonanz bei 6,15 MHz, die bei Anwendung der Christoffelschen Theorie als transversale Schwingung gedeutet werden muß. Diese Scherschwingung kann aber nicht unmittelbar durch ein elektrisches Wechselfeld  $E_x$  angeregt werden, aus dem sich nur die elastischen Deformationen der Gln. (1) bis (3) ergeben können. Es bleiben nur der Umweg über Koppelschwingungen oder Randeffect und eine Komponente  $E_y$  des elektrischen Feldes in Y-Richtung.

Tab. 2. Resonanzen eines X-Quarzes und ihre Deutung.

beobachtete Resonanzfrequenz	theoretische Abschätzung	Schwingungstyp und Anregung
1,04 MHz	0,98 MHz	longitudinal in Y-Richtung; transversaler Piezoeffekt
1,73	1,64	
2,30	2,30	
3,45	3,61	
6,15	6,15	transversal; piezoelekt. Scherungskräfte
6,90	6,93	longitudinal in X-Richtung; longitudinaler Piezoeffekt
10,35		wahrscheinlich longitudinal in Y-Richtung; transversaler Piezoeffekt
11,50		
20,70	20,80	longitudinal in X-Richtung; longitudinaler Piezoeffekt

Tabelle 2 faßt die Ergebnisse für den X-Quarz zusammen. Nach Abb. 2 sind die Resonanzen bei 6,15; 6,9 und 20,7 MHz, die nach Christoffel bei unendlich ausgedehnten Platten auftreten können, am stärksten anregbar. Dies entspricht auch den üblichen Vorstellungen, nach denen eine Platte mit einem Verhältnis von Dicke zu Durchmesser, das

kleiner als  $1/10$  ist, als eine unendlich ausgedehnte Platte behandelt werden kann<sup>6</sup>; diese Bedingung wird bei allen hier verwendeten Quarzen gut eingehalten. Jedoch zeigt das diskutierte Beispiel, daß trotzdem die Resonanzen einer begrenzten Platte angeregt werden können, wenn diese auch gelegentlich nur schwach auftreten.

#### b) Feinstruktur einer Resonanz

Werden die Resonanzen in Abb. 2 mit größerer Auflösung untersucht, dann ergeben sich unübersichtliche Strukturen wie in Abb. 4, die die Dickenresonanz bei 6,9 MHz zeigt. Ähnliche Resultate sind

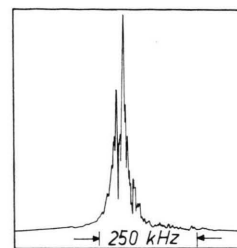


Abb. 4. Feinstruktur der Dickenresonanz bei 6,9 MHz.

von SCHNABEL<sup>7</sup> an  $\text{LiNbO}_3$ -Kristallen beobachtet worden. Eine einfache Deutung derart komplizierter Spektren ist nicht mehr möglich. Deshalb wird hier nur eine Abschätzung vorgenommen.

Der Quarz ist als Resonator aufzufassen, dessen Dicke im Fall der Dickenresonanz von Abb. 4 einer halben Wellenlänge entspricht, während sich in den Richtungen senkrecht zur Dicke stehende Wellen ausbilden. Die elastische Auslenkung erfolgt dabei senkrecht zur Plattenebene.

Für eine überschlägige Rechnung wird der X-Quarz als quaderförmiger Resonator behandelt; seine Dicke wird gleich der Dicke der Kreisscheibe angenommen. Die Querdimensionen des Resonators ergeben sich aus der Forderung der Volumengleichheit von Resonator und Quarzscheibe. Da die Schallgeschwindigkeit im Quarz bekannt ist, läßt sich daraus das elastische Verhalten des Resonators herleiten. Weil der Resonator rechteckig angenommen wird, lösen Ansätze von einfachen trigonometrischen Funktionen seine Schwingungsgleichung. Die Resonanzfrequenzen lassen sich leicht abzählen. Die Abzählung liefert 40 Eigenfrequenzen innerhalb des in Abb. 4 eingezeichneten Intervalls von 250 kHz unter

<sup>6</sup> IRE Standards on Piezoelectric Crystals: Proc. IRE **46**, 1, 764 [1958].

<sup>7</sup> P. SCHNABEL, Vortrag FA Akustik DPG München 1968.



der Voraussetzung, daß in Richtung der Platten-normale eine halbe Wellenlänge in dem Quarz Platz hat. Demgegenüber lassen sich aus der experimentellen Kurve etwa 35 Resonanzen entnehmen. Es zeigt sich also Übereinstimmung in der Größenordnung. Sicherlich werden einige Resonanzen durch stärker angeregte verdeckt oder sind durch zu schwache Kopplung an die reine Dickenresonanz nicht piezoelektrisch anregbar.

#### 4. Resonanzen eines zusammengesetzten Schwingers

In dem vorhergehenden Abschnitt wurde der Quarz allein betrachtet; in diesem Fall wurde er als Resonator betrieben. Wird der Quarz mit Proben gekoppelt, dann dient er als Ultraschallgenerator. Der zusammengesetzte Schwinger hat eine Reihe von möglichen Resonanzen, die aber nicht immer anregbar sein müssen. Ob eine Resonanz des Schwingers beobachtet werden kann, hängt hauptsächlich davon ab, ob der in dem Schwinger enthaltene Quarz eine anregbare Resonanz in der Nähe der Schwingerresonanz hat. Dies bedeutet, daß in dem Schwinger eine piezoelektrisch aktive Verzerrungskomponente vorhanden sein muß, falls eine Schwingerresonanz angeregt werden soll. Im Anhang wird dies an einem Beispiel erläutert.

Die verwendeten zusammengesetzten Schwinger liefern glatte Resonanzkurven wie im Teilbild von Abb. 1. Voraussetzung dafür sind ausgezeichnete Formgenauigkeit von Quarz und Proben und eine gute Kittung zwischen ihnen. Durch die symmetrische Anordnung des Schwingers und durch die akustische Belastung des Quarzes werden Störmoden unterdrückt<sup>8</sup>. Nach GOEHLICH<sup>1</sup> kann zur Auswertung der Schwingerresonanzen angenommen werden, daß im wesentlichen longitudinale Schwingungen in Richtung der Plattennormale auftreten. Dann ergibt sich als Frequenzgleichung des Schwingers:

$$\zeta \operatorname{tg} \psi = \operatorname{ctg}(\varphi/2) \quad \text{mit} \quad \zeta = v_a \varrho_a / (v \varrho) \\ \varphi = 2 \pi \nu_r d/v \quad \text{und} \quad \psi = 2 \pi \nu_r d_a/v_a \quad (5)$$

sind die Phasenwinkel in Quarz und Probe, wenn der Schwinger in seiner Resonanzfrequenz  $\nu_r$  schwingt. Die weiteren Größen haben die Bedeu-

tung:

- $d, d_a$  Dicke von Quarz und Probe;
- $\varrho, \varrho_a$  Dichte von Quarz und Probe;
- $v, v_a$  Schallgeschwindigkeit in Quarz und Probe.

Die Resonanzen des Schwingers sind durch die Schnittpunkte der Geraden:

$$\varphi/\pi = (v_a d/v d_a) \quad \psi/\pi = a \psi/\pi \quad (6)$$

mit der Frequenzgleichung (5) gegeben; zur Abkürzung ist die Konstante  $a$  eingeführt.

Aus den gemessenen Frequenzen  $\nu_r$  und den geometrischen Abmessungen des Schwingers ergibt sich über die Schnittpunkte von (5) und (6) die Schallgeschwindigkeit  $v_a$  in der Probe, die in der Steigung der Geraden (6) enthalten ist. Zur eindeutigen Festlegung der Schnittpunkte von (5) und (6) ist nur die Annahme notwendig, daß  $v_a$  im Bereich  $4 \cdot 10^5$  bis  $6 \cdot 10^5$  cm/sec liegt. Die meisten Messungen liefern dann Resultate nahe bei:

$$v_a = 5,70 \cdot 10^5 \text{ cm/sec.}$$

Eine erhebliche Anzahl weiterer Messungen führt aber auf deutlich abweichende Werte von  $v_a$ ; die Abweichungen sind eindeutig außerhalb der Fehlergrenzen. Eine Übersicht über die Meßergebnisse gibt Abbildung 5.

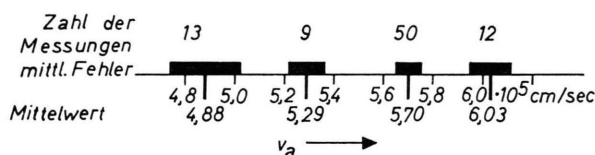


Abb. 5. Experimentelle Ergebnisse über der  $v_a$ -Skala.

$v_a$  ist zunächst nicht mehr als ein Parameter, der sich aus einer experimentell festgestellten Resonanz  $\nu_r$  des Schwingers herleitet. Die Meßergebnisse fallen in Gruppen zusammen, aus denen sich Mittelwerte errechnen (Abb. 5). Im Anhang wird an einem Beispiel erläutert, wie sich an ein und demselben Schwinger verschiedene Werte von  $v_a$  ergeben können. Sehr dicht an den errechneten Mittelwerten liegen die von BOZORTH et al.<sup>9</sup> mit longitudinale Schall an Nickeleinkristallen in den angegebenen kristallographischen Richtungen gemessenen Schallgeschwindigkeiten:

$$v_{[100]} = 5,30 \cdot 10^5 \text{ cm/sec; } v_{[110]} = 6,06 \cdot 10^5 \text{ cm/sec.}$$

Diese Übereinstimmung weist darauf hin, daß es sich bei den hier untersuchten Schwingern um Re-

<sup>8</sup> D. A. BERLINCOURT, D. R. CURRAN u. H. JAFFE, in: W. P. MASON, Physical Acoustics IA, Academic Press, New York und London 1964.

sonanzen handelt, die durch Schwingungszustände wie in Einkristallen charakterisiert sind. Man kann sich vorstellen, daß bei diesen Resonanzen die Kristallite in den Schwingungsbäuchen, die für den Schwingungszustand des Resonators am wichtigsten sind, wegen der – wenn auch geringen – Textur des Probenmaterials eine bevorzugte Orientierung haben. Es kommt hinzu, daß bei den höheren Frequenzen die Durchmesser größerer Kristallite im Probenmaterial die Größenordnung der halben Schallwellenlänge haben können.

$v_a = 5,70 \cdot 10^5$  cm/sec ist die Schallgeschwindigkeit in polykristallinem Nickel, das als Platte vorliegt. Die zugehörigen Schwingungen sind rein longitudinale Bewegungen in Richtung der Plattennormale ohne Mitwirkung der Querkontraktion. Die Gruppe der Resonanzen, die  $v_a$ -Werte um  $4,88 \cdot 10^5$  cm/sec ergeben, dürften dagegen als stabförmige Schwingungen aufzufassen sein, bei denen die longitudinale Bewegung durch die Querkontraktion beeinflusst wird.

Tab. 3. Gemessene Schallgeschwindigkeit und Deutung des Schwingungszustandes.

Mittelwert $v_a$ [ $10^5$ cm/sec]	mittlerer Fehler	Literaturwert $v_a$ [ $10^5$ cm/sec]	Deutung der Schwingung
4,88	2,9%	4,79 <sup>4</sup>	stabförmig
5,29	1,4	5,30 <sup>9</sup>	[100]
5,70	0,8	5,63 <sup>4</sup>	plattenförmig
6,03	1,3	6,06 <sup>9</sup>	[110]

In Tab. 3 sind die Meßergebnisse zusammengefaßt und den Werten aus der Literatur gegenübergestellt. Die letzte Spalte ist eine Deutung der Resonanzen. Die Messungen dieser Arbeit gelten für Nickel in der magnetischen Sättigung.

## 5. Zusammenfassung

Das Schwingungsverhalten zusammengesetzter Resonatoren ist im allgemeinen nicht leicht zu deuten. Erst geometrisch einfache Resonatoren wie die in dieser Arbeit benutzten scheibenförmigen Schwinger nach GOEHLICH<sup>1</sup> lassen sich analysieren. Es wird gezeigt, wie sich das Frequenzspektrum eines kreisrunden X-Quarzes auch unter sehr vereinfachenden Annahmen verstehen läßt. Die experimentell gefundenen Resonanzen des Quarzes können durch den

longitudinalen und den transversalen reziproken piezoelektrischen Effekt erklärt werden. Die Feinstruktur einer Resonanz wird auf stehende Wellen senkrecht zur Plattennormale des Quarzes zurückgeführt.

Im zusammengesetzten Schwinger wird der Quarz als Ultraschallgenerator betrieben. Die möglichen Resonanzen des Schwingers lassen sich nur dann beobachten, wenn der Quarz in der Nähe der Resonanzfrequenz eine piezoelektrisch wirksame Verzerrungskomponente hat. Andererseits werden auch starke Resonanzen des Quarzes unterdrückt, wenn sie von den Resonanzfrequenzen des Schwingers entfernt liegen. Dies wird an einem Beispiel in Einzelheiten demonstriert. Aus den Messungen an zahlreichen weiteren Schwingern kann geschlossen werden, daß neben der erwarteten plattenförmigen Schwingung auch andere Schwingungsformen auftreten.

## Anhang:

### Messungen an einem speziellen Schwinger

Dieses Beispiel soll zeigen, wie die Resonanzspektren von Quarz und Schwinger zusammenwirken, und wie die Werte für  $v_a$  bei der Auswertung entstehen. Es wird die Theorie<sup>1</sup> zugrunde gelegt, die auf die Gln. (5) und (6) führt; es werden also im wesentlichen longitudinale Schwingungen in Richtung der Plattennormale vorausgesetzt. Weiterhin wird nur noch die Annahme gemacht, daß  $v_a$  zwischen  $4 \cdot 10^5$  und  $6 \cdot 10^5$  cm/sec liegt.

Die Messungen wurden an einem Schwinger gemacht, der den im 3. Abschnitt beschriebenen X-Quarz enthält. Die Proben, die beidseitig auf den Quarz gekittet sind, haben die Daten: Dicke  $d_a = 0,184$  mm; Planparallelität  $0,3 \mu\text{m}$ ; Durchmesser 12,5 mm. An dem Schwinger werden die Resonanzfrequenzen  $\nu_r$  gemessen, aus denen  $v_a$  bestimmt werden soll.

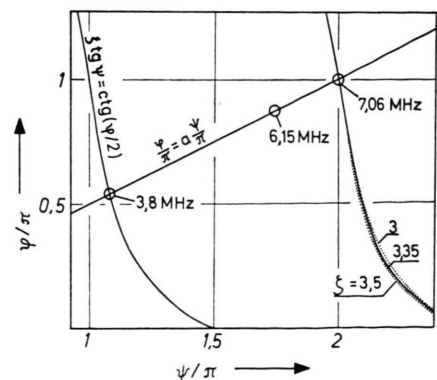


Abb. 6. Zur Lösung der Frequenzgleichung eines Schwingers.

<sup>9</sup> R. M. BOZORTH, W. P. MASON, H. J. MCSKIMIN u. J. G. WALKER, Phys. Rev. **75**, 1954 [1949].

Abbildung 6 zeigt einen Ausschnitt aus dem Kurvenfeld, das für den Schwinger zutrifft. Gezeichnet sind die Kurven (5) für einen mittleren Wert  $\zeta = 3,35$ ;  $\zeta$  ist ein Maß für die akustische Anpassung von Quarz und Probe. Die Abhängigkeit der Kurvenschar (5) von  $\zeta$  ist sehr gering. Im rechten unteren Teil von Abb. 6 ist die Streuung eingezeichnet, falls  $\zeta = 3 \dots 3,5$  ist (entsprechend einer Schallgeschwindigkeit  $v_a = 5,1$  bis  $6,0 \cdot 10^5$  cm/sec). Der Schwinger zeigt eine Resonanz bei 3,8 MHz; dies entspricht einem  $\varphi/\pi = 0,54$ . Da die Größenordnung von  $v_a$  bekannt ist, folgt aus (6) sofort ein Näherungswert von  $\psi/\pi$ . Die graphische Lösung liefert  $\psi/\pi = 1,08$ . Damit ist die Gerade (6) bekannt und aus deren Steigung abgeleitet die Schallgeschwindigkeit  $v_a = 5,73 \cdot 10^5$  cm/sec. Die Gerade (6) kann nun in das Kurvenfeld (5) eingezeichnet werden. Die Schnittpunkte liefern die möglichen Resonanzen des Schwingers. Zum Beispiel zeigt Abb. 6, daß bei  $\varphi/\pi = 1$  — entsprechend 7,02 MHz — eine weitere Resonanz zu erwarten ist. Sie wird auch tatsächlich bei 7,06 MHz festgestellt und führt auf  $v_a = 5,75 \cdot 10^5$  cm/sec. Mit Hilfe der Geraden (6) in dem Kurvenfeld (5), von dem Abb. 6 nur einen Ausschnitt zeigt, läßt sich die beobachtete Resonanz bei 10,7 MHz deuten; sie liefert  $v_a = 5,67 \cdot 10^5$  cm/sec.

Weitere Resonanzen des Schwingers werden bei 0,96, 2,36 und 12,38 MHz gemessen. Werden sie nach demselben Verfahren ausgewertet wie oben, so folgen die Schallgeschwindigkeiten  $v_a = 5,36, 6,02$  und  $5,33 \cdot 10^5$  cm/sec. Im 4. Abschnitt werden diese Ergebnisse erklärt.

Aus der graphischen Lösung der Frequenzgleichung (5) sind noch weitere Resonanzen des Schwingers in der Nähe von 15,4 und 17,9 MHz zu erwarten. Experimentell lassen sie sich jedoch nicht feststellen, weil keine piezoelektrisch anregbaren Resonanzen des Quar-

Tab. 4. Beobachtete Resonanzen eines Schwingers.

Resonanz des Quarzes	Resonanz des Schwingers	daraus abgeleitete Schallgeschwindigkeit $v_a$
1,04 MHz	0,96 MHz	$5,36 \cdot 10^5$ cm/sec
1,73		
2,30	2,36	6,02
3,45	3,80	5,73
6,15		
6,90	7,06	5,75
10,35	10,17	5,67
11,50	12,38	5,33
20,70		

zes in der Nähe liegen. Andererseits muß aber nicht jede Quarzresonanz zur Anregung einer Schwingerresonanz geeignet sein. Wie Abb. 6 zeigt, liegt z. B. die starke Quarzresonanz bei 6,15 MHz sehr weit von einer Resonanz des Schwingers entfernt. Deshalb ist von dieser Resonanz im Spektrum des Schwingers nichts zu bemerken. In Tab. 4 sind sämtliche, am diskutierten Schwinger gemessenen Resonanzen aufgeführt und den Resonanzen des Quarzes gegenübergestellt.

Herrn Prof. Dr. J. JAUMANN, unter dessen Leitung diese Arbeit angefertigt wurde, wird für seine stete Bereitschaft zu helfen gedankt. Außerordentlich wertvoll für den Fortgang der Arbeit waren zahlreiche Diskussionen mit den Herren Prof. Dr. G. DIETZ, Dr. F. FORSTMANN, Dr. P. SCHNABEL und Dipl.-Phys. H. SCHWEPPE, der Hinweis von Herrn Prof. Dr.-Ing. E. HÜBNER auf den transversalen Piezoeffekt und die Hilfe von Herrn CASPERS von der Fa. P. Wolters, Mettmann, bei der Präparation der Proben. Dafür und für die Bereitstellung von Mitteln seitens der Deutschen Forschungsgemeinschaft wird gedankt.